

# Lamb 波频散特性的数值仿真研究

张 燕<sup>1</sup>, 龚立娇<sup>2</sup>

(1. 南京航空航天大学 金城学院, 江苏 南京 211156; 2. 石河子大学 机械电气工程学院, 新疆 石河子 832003)

**摘 要:** Lamb 波频散特性是进行超声波损伤检测的前提, 采用窄带脉冲信号作为激励信号产生 Lamb 波, 并在 matlab 环境下采用二分法对 Lamb 波的瑞利-兰姆频率方程进行了数值仿真, 绘制了 Lamb 波在复合材料层合板中传播的频散特性曲线并分析了其特点, 为超声波无损检测提供了重要的参考依据。

**关键词:** 超声检测; 窄带脉冲; Lamb 波; 数值分析; 频散曲线

**中图分类号:** TM935 **文献标识码:** A

## Numerical Simulation Study on Lamb Wave Dispersion Curves

ZHANG Yan<sup>1</sup>, GONG Lijiao<sup>2</sup>

(1. College of Jincheng, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211156, China;

2. College of Machinery and Electrical Engineering, Shihezi University, Shihezi 832003, China)

**Abstract:** Dispersion curves are of great important to Lamb wave in ultrasonic nondestructive testing. The narrow-band pulse was employed to generate Lamb wave. Rayleigh-Lamb equation was analyzed and a numerical calculation method for Lamb wave dispersion curves was presented based on matlab, by which the phase velocity curves and group velocity curves of Lamb wave in composite material plate were plotted respectively. It was of significance for the use of Lamb wave in nondestructive testing.

**Key words:** ultrasonic testing; narrow-band pulse; Lamb wave; numerical calculation; dispersion curves

### 0 引言

Lamb 波作为一种典型的超声波, 它可在无限均匀平板各向同性薄板中进行传播, 根据薄板两表面质点的振动相位关系, Lamb 波可分为对称型和非对称型 Lamb 波<sup>[1]</sup>。当 Lamb 波遇到结构损伤时, 其传播特性会发生改变, 根据这一特性, 工程上已广泛应用超声 Lamb 波对板状材料构件的缺陷或质量进行无损检测<sup>[2-4]</sup>, 但 Lamb 波在激励、传播及接收方面的特性复杂, 主要体现在其频散特性及多模式现象, 该特性引起了研究者的关注。

在应用 Lamb 波前首先应根据不同的传播介质、不同的结构形式来选择合适的 Lamb 波模式。为直观的表达 Lamb 波传播特性, 这就需根据 Lamb 波频率方程来绘制频散曲线, 在 Matlab 环境下采用二分法对瑞利-兰姆频率方程进行数值分析并绘制了频散曲线, 为超声波无损检测提供了重要的参考依据。

### 1 Lamb 波的激励信号

在复合材料的超声 Lamb 波无损检测中常采用

窄带脉冲信号来激励 Lamb 信号, 其优点是信号能量较集中, 可得精确的波速, 计算出较准确的损伤位置。为减少信号能量的泄露, 常选用 Morlet 小波和 Hanning 加窗函数。

定义 Morlet 小波信号的表达式为

$$\psi(t) = Ae^{-t^2/2} \cos(nt) \quad (1)$$

式中:  $A$  为信号幅值;  $n$  为波峰数。式(1)表示一个高斯包络的余弦信号。

Hanning 加窗正弦波信号表达式为

$$V_{in}(t) = A[H(t) - H(t - n/f_c)] \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi f_c t}{n}\right) \sin 2\pi f_c t \quad (2)$$

式中  $f_c$  为中心频率。

现以 5 个波峰, 中心频率为 115 kHz 参数为例, 可得 2 个加窗激励信号的时域图和频域图, 如图 1 所示。其中时域图表现为 5 波峰的单波, 而频域分析中可看出, 激励信号的频率成分都集中在 115 kHz 中心频率附近, 这样控制了 Lamb 波的频散现象, 有利于信号的分析。

收稿日期: 2013-12-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50907042)

作者简介: 张燕(1982-), 女, 江苏南京人, 讲师, 硕士生, 主要从事计算机测控的研究。E-mail: zhangyan\_nuaa@sina.com.

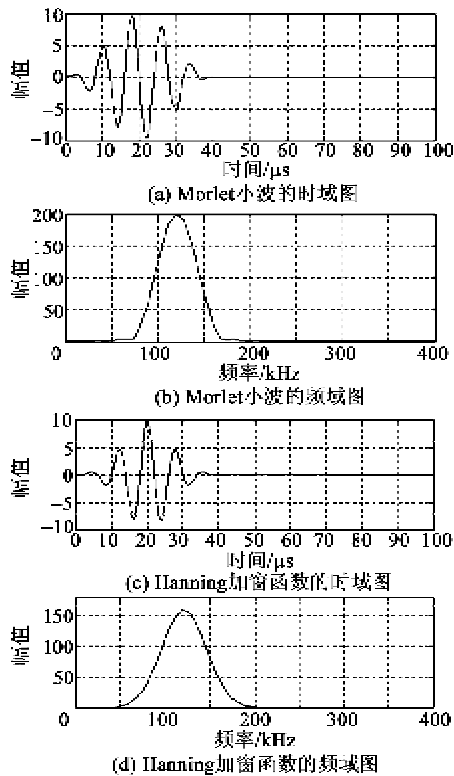


图1 Morlet小波和加窗正弦波的时频图

### 2 瑞利-兰姆频率方程

Lamb波在无限均匀平板各向同性薄板中传播时, Lamb波波动特性及传播特性可用瑞利-兰姆(Rayleigh-Lamb)频率方程<sup>[5]</sup>描述, 即对称模式:

$$4pq \tan \frac{\pi f d}{c_p} q + (p^2 - 1)^2 \tan \frac{\pi f d}{c_p} p = 0 \quad (3)$$

反对称模式:

$$4pq \tan \frac{\pi f d}{c_p} p + (p^2 - 1)^2 \tan \frac{\pi f d}{c_p} q = 0 \quad (4)$$

其中:

$$p = \sqrt{(c_p/c_s)^2 - 1} \quad (5)$$

$$q = \sqrt{(c_p/c_1)^2 - 1} \quad (6)$$

式中:  $c_p$  为 Lamb 相速度;  $c_s$  为横波速度;  $c_1$  为纵波速度;  $f$  为 Lamb 频率;  $d$  为板厚。

$c_1$  和  $c_s$  取决于基体材料的物理参数, 当基体材料为玻璃纤维增强的复合材料层合板时,  $c_s = 2\ 088$  m/s,  $c_1 = 3\ 312$  m/s。

式(3)、(4)表达了  $c_p$  和频厚积  $fd$  间的关系。该方程决定了 Lamb 波是多模式、频散的。所谓多模式现象就是同一个频率值对应着不止一种 Lamb 波模式; 而频散特性就是 Lamb 波的速度随频率的

变化而发生改变。通常用  $S_0, S_1, S_2, \dots$  及  $A_0, A_1, A_2, \dots$  来表示对称 Lamb 波和非对称 Lamb 波不同的模式和阶次, 即 Lamb 波模式。

### 3 数值分析

以 Lamb 频率方程的对称模式为例, 详细讲解 Lamb 波频散曲线的求解方法。

设  $c_p$  为自变量<sup>[6]</sup>, 当  $c_p$  给定某一值(特殊值除外)时, Lamb 波频率式(3)可改写为

$$A \tan Bx + C \tan Dx = 0 \quad (7)$$

式中:  $x = fd$ ; 系数  $A, B, C, D$  的值随  $c_p$  的变化而改变, 各系数的值如表 1 所示。表中,  $a = 4|pq| > 0$ ,  $b = |\pi q/c_p| > 0$ ,  $c = (p^2 - 1)^2 > 0$ ,  $d = |\pi p/c_p| > 0$ ,  $i$  为虚数单位。

表1 频率方程参数表

系数	$c_s < c_p < c_1$	$c_s < c_p < c_1$	$c_1 < c_p$
A	$-a$	$a$	$a$
B	$b_i$	$b_i$	$b$
C	$c$	$c$	$c$
D	$d_i$	$d$	$d$

1) 当  $c_p = c_1$  时,  $q = 0$ , 此时式(7)变为特殊点的求解, 即

$$(p^2 - 1)^2 \tan \frac{\pi p}{c_p} x = 0 \quad (8)$$

可得式(8)的解  $x = k(c_p/p)$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots$ )。

同样, 当  $c_p = \sqrt{2}c_s$  时,  $p = 1$  可解得方程的解为  $x = \frac{(2k-1)c_p}{2q}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ )。上述两种情况  $k = 1, 2, 3, \dots$  时, 分别对应 Lamb 波的 1, 2, 3, ... 阶模式的解。

当  $c_p = c_s$  时,  $p = 0$ , 方程变成恒等式, 没有意义。

2) 当  $0 < c_p < c_s$  时, 式(7)可改写为

$$F(x) = a \tanh bx - c \tan dx = 0 \quad (9)$$

分析可以知道, 如果该方程有实数解, 必须满足条件  $c > a$ , 且  $ab > cd$ 。此时  $F(x)$  在区间  $(0, \frac{1}{2d} \ln \frac{c+a}{c-a})$  内有且仅有一解, 且在区间的两端点处, 函数  $F(x)$  异号, 由此得到的解对应 0 阶模式。

3) 当  $c_s < c_p < c_1$  时, 式(7)可写成:

$$F(x) = a \tanh bx - c \tan dx = 0 \quad (10)$$

分析可知,  $F(x)$  在两相邻间断点构成的区间  $[\frac{k\pi}{d}, \frac{(2k+1)\pi}{2d}]$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) 内有且仅有一解, 且

在区间的两端点处,函数  $F(x)$  异号。 $k=1,2,3,\dots$  分别对应 1,2,3, $\dots$  阶模式的解。

特别是当满足条件  $ab > cd$  时,在区间  $(0, \frac{1}{d} \arctan \frac{a}{c}]$  内方程亦有且仅有一解,且在区间的两端点处,函数  $F(x)$  异号,此时的解对应得是 0 阶模式。

1) 当  $c_1 < c_p$  时,式(7)可写成:

$$F(x) = a \tan bx + c \tan dx = 0 \quad (11)$$

$$\text{令 } bx = \frac{(2k-1)}{2} \pi, dx = \frac{(2k-1)}{2} \pi \quad (k=1,2,3,\dots),$$

可求出函数  $F(x)$  的一系列间断点,将这些间断点按从小到大的顺序排成一列,设为  $\{J_1, J_2, J_3, \dots\}$ 。在任意 2 个相邻间断点所构成的区间  $(J_k, J_{k+1})$  内对函数  $F(x)$  求导得

$$F'(x) = ab \sec^2 bx + cd \sec^2 dx > 0 \quad (12)$$

又因  $F(J_k) < 0, F(J_{k-1}) > 0$ ,即在区间内函数  $F(x)$  单调,且在两端点处异号,所以在  $(J_k, J_{k+1})$  内方程  $F(x)$  有且仅有一解。此时  $k=1,2,3,\dots$  分别对应 1,2,3, $\dots$  阶模式的解。

同样地,对于 Lamb 波的反对称模式,根据式(4)也可求出其在各个区间的解。

#### 4 频散曲线的绘制

根据 Lamb 波在复合材料层合板中的横波速度和纵波速度,在 Matlab 环境下采用二分法对瑞利-兰姆频率方程进行数值计算,其流程图如图 2 所示。

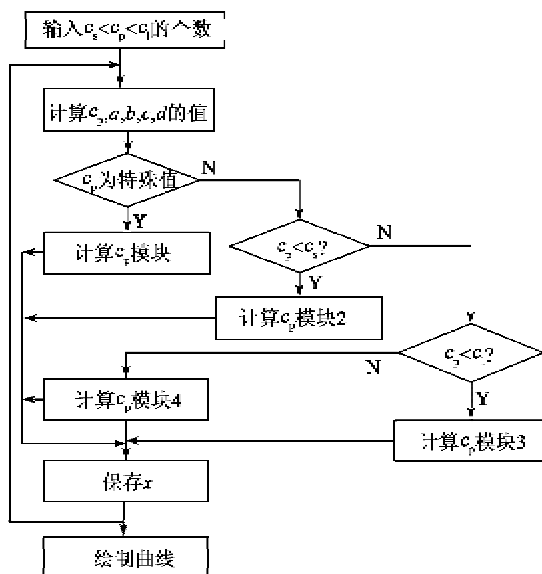


图 2 Lamb 波频散曲线绘制流程图

Lamb 波的这种特性反映在相速度-频厚积平面内就表现为一组曲线,即相速度频散曲线。

具有有限频宽的超声波在薄板中以群速度  $c_g$  传播,即

$$c_g = 2\pi \frac{df}{dk_0} \quad (13)$$

如果把群速度随频率的变化反映在群速度-频厚积平面内,可得群速度-频散曲线。利用 Matlab 的绘图功能实现了 Lamb 波的相速度和群速度频散曲线,如图 3 所示。

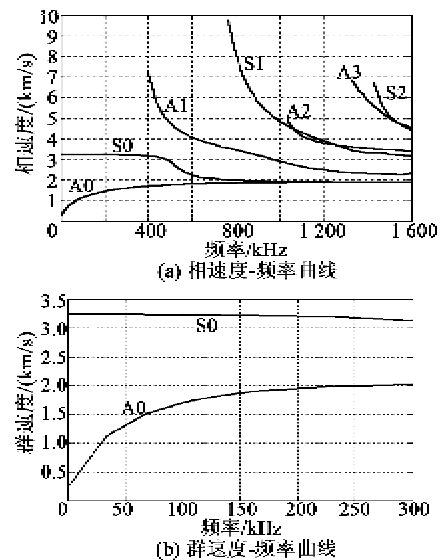


图 3 复合材料板中 Lamb 频散曲线

由图 3 可看出,复合材料板的频散曲线特点有<sup>[7]</sup>:

1) 除对称模式 S0 和非对称模式 A0 外,其他所有模式均存在截至频率,即在截至频率以上,该模式是可传播的;在截至频率以下,该模式迅速衰减,不能传播。

2) 在某一频率处,会同时产生 2 个(或 2 个以上)模式,且各个模式的相、群速度各不相同。特别是在高频段,这种情况更明显。

3) 各个模式都存在频散现象,即群速度随频率的变化而变化。

4) 当频率小于 400 kHz 时只存在两种模式 S0 和 A0,同时 S0 模式的速度远大于 A0 模式的速度,这说明将频率控制在 400 kHz 范围内,且实验材料板的尺寸适合时可减少多模式的混叠现象。

由于 Lamb 波的多模式和频散特性,给无损检测造成了困扰,国内外的研究者通常采用传感器优化布置、调整激励频率和双面传感 3 种方法来解决

该问题。

## 5 结束语

超声 Lamb 在复合材料的无损检测中应用广泛,因此绘制其传播的频散曲线,分析其频散特性和多模式现象对于充分利用 Lamb 波具有重要的实际意义。以相速度为自变量对频散方程进行数据分析,在 Matlab 环境下采用二分法绘制了相速度和群速度曲线,为复合材料无损检测打下了良好的基础。

## 参考文献:

- [1] 艾春安,李剑. 兰姆波频散方程的数值解法[J]. 无损检测, 2005, 27(6): 294-296.  
AI Chun'an, LI Jian. Numerical calculation for Lamb wave frequency equation[J]. Non-destructive Testing, 2005, 27(6): 294-296.
- [2] SU Z, YE L. Identification of damage using Lamb waves[M]. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [3] 阎石,张海凤,蒙彦宇. Lamb 波频散曲线的数值计算及实验验证[J]. 华中科技大学学报, 2010, 27(1): 1-4.  
YAN Shi, ZHANG Haifeng, MENG Yanyu. Numerical calculation and experimental validation for Lamb wave dispersion curves [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology, 2010, 27(1): 1-4.
- [4] 郑祥明,赵玉珍,史耀武. 兰姆波频散曲线的计算[J]. 无损检测, 2003, 25(2): 66-69.  
ZHENG Xiangming, ZHAO Yuzhen, SHI Yaowu. Calculation for Lamb wave dispersion curves[J]. Non-destructive Testing, 2003, 25(2): 66-69.
- [5] YOJI O, KEIJI F. Delamination detection in composite laminates using dispersion change based on mode conversion of Lamb waves[J]. Smart Materials and Structures, 2010, 19(11): 1-11.
- [6] 张利绍,陈换过,李剑敏,等. 基于 Lamb 波的复合材料板损伤检测[J]. 浙江理工大学学报, 2011, 28(6): 898-903.  
ZHANG Lizhao, CHEN Huanguo, LI Jianmin, et al. Damage detection in composite laminates based on Lamb wave[J]. Journal of Zhejiang Science Technology University, 2011, 28(6): 898-903.
- [7] 张燕. 基于模糊神经网络的复合材料损伤主动监测技术研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2008.
- [3] (上接第 700 页)  
FRIEDT J M, DROIT C, MARTIN G, et al. A wireless interrogation system exploiting narrowband acoustic resonator for remote physical quantity measurement [J]. Review of Scientific Instruments, 2010, 81(1): 014701-014701-9.
- [4] 高树廷,刘洪升. 相位噪声分析及对电路系统的影响[J]. 火控雷达技术, 2003, 32(2): 58-63.  
GAO Shuting, LIU Hongsheng. Analysis of phase noise and its effects on circuit systems[J]. Fire Control Radar Technology, 2003, 32(2): 58-63.
- [5] LEESON D B. A simple model of feedback oscillator noise spectrum[J]. Proceedings of the IEEE, 1966, 54(2): 329-330.
- [6] SAUVAGE G. Phase noise in oscillators: a mathematical analysis of Leeson's model[J]. Instrumentation and Measurement, 1977, 26(4): 408-410.
- [7] 白居易. 低噪声频率合成[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1995.
- [8] 高光天. 模数转换器应用技术[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [9] 陈宁,费元春. 高速数据采集系统中的孔径抖动[J]. 北京理工大学学报, 2003, 23(2): 234-237.  
CHEN Ning, FEI Yuanchun. Effects of aperture jitter to SNR in high speed data acquisition systems [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2003, 23(2): 234-237.
- [10] YAO Y X, PANDIT S M. Cramér-Rao lower bounds for a damped sinusoidal process[J]. Signal Processing, 1995, 43(4): 878-885.