

石英晶体板高频振动的三维有限元分析

吴荣兴^{1,2}, 李继亮², 于兰珍^{1,2}, 王 骥²

(1. 宁波职业技术学院 建筑工程系, 浙江 宁波 315800; 2. 宁波大学 机械与力学学院, 浙江 宁波 315211)

摘 要:通过建立石英晶体板的三维模型,运用有限元分析软件 ANSYS 获得了石英晶体板厚度剪切振动的振动频率和位移云图。验证了数值计算结果的收敛性并提出了避免振动模式强烈耦合的石英晶体板最佳长厚比的选取方法。模型分析过程中发现,六面体网格比四面体网格易观察到石英晶体板的厚度剪切振动。

关键词:石英晶体谐振器;板;有限元法;厚度剪切振动;频率;位移

中图分类号:TN752.2;TP12

文献标识码:A

Three-dimensional Finite Element Analysis for High Frequency Vibrations of Quartz Crystal Plate

WU Rongxing^{1,2}, LI Jiliang², YU Lanzhen^{1,2}, WANG Ji²

(1. Dept. of Architectural Engineering, Ningbo Polytechnic, Ningbo 315800, China;

2. School of Mechanical Engineering and Mechanics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The vibration frequency and displacement shapes of thickness-shear vibrations of quartz crystal plate were obtained by establishing three-dimensional model of quartz crystal plate and using the finite element software ANSYS. The convergence of numerical results was verified and the selection method of optimal length/thickness of quartz crystal plate was proposed for avoiding strong coupling of vibration modes. The hexahedron mesh was more easily to find the thickness-shear vibrations of quartz crystal plate compared with tetrahedron mesh during modeling.

Key words: quartz crystal resonator; plate; finite element method; thickness-shear vibration; frequency; displacements

0 引言

作为频率控制元件的石英晶体谐振器因其具有稳定性好,精度高和温频性能优良等特点,在频率控制领域得到广泛应用^[1-2]。Mindlin 等将石英晶体板内的位移按厚度坐标的幂级数展开的方法将传统的三维振动问题转化为二维问题,从而求解了石英晶体板的高频振动,获得了精确的色散关系、频谱关系和相关电路参数^[3-5]。与此同时基于 Mindlin 板理论的二维有限元方程在石英晶体谐振器高频振动分析中得到了相关应用^[6-7]。虽然三维运动方程结合相关边界条件可精确描述石英晶体谐振器的振动规律,但由于运动方程及边界条件的复杂性,通过解析法求解不可能^[8]。虽然从理论上利用有限元法可

求解三维运动方程,但庞大的矩阵运算对计算机的运算速度及内存要求很高,其求解结果的后处理也很复杂^[9-10]。因此在过去直接利用三维有限元法对石英晶体板高频振动很少有人去尝试。伴随着计算机性能的不断改进和相应算法的改进,利用有限元法结合三维压电理论来分析石英晶体谐振器的高频振动正变的可行^[11]。本文基于三维压电理论并利用有限元软件 ANSYS 直接分析石英晶体板的高频振动,获得了清晰的厚度剪切振动的位移云图。

1 有限元基本方程

首先定义石英晶体板内的位移向量

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\} \quad (1)$$

进一步定义应变向量

收稿日期:2013-12-09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10932004);浙江省教育厅高校科研基金资助项目(Y201327293);浙江省重中之重学科开放基金资助项目(sj1202);宁波职业技术学院青年博士创新基金资助项目(2013001)

作者简介:吴荣兴(1982-),男,浙江金华东阳人,讲师,博士,主要从事弹性波理论的研究。

$$\mathbf{S} = \partial_u \mathbf{u} \quad (2) \quad \text{式中}$$

这里算子 ∂_u 的形式如下

$$\partial_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

此时三维压电本构方程可写成如下矩阵形式

$$\mathbf{T} = \mathbf{cS} \quad (4)$$

式中 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{c}$ 分别为应力向量和石英晶体材料的弹性常数矩阵。

描述石英晶体板高频振动的变分方程的矩阵形式^[6-7, 11]为

$$\iiint_V (\delta \mathbf{S}^T \mathbf{cS} + \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}}) dV = \iint_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} dS \quad (5)$$

式中: V , S 和 ρ 分别为石英晶体板的体积, 表面和石英晶体材料的密度; F 为石英晶体板的表面面力。

对于有限元分析中的每一个离散单元, 石英晶体板内任何点的位移场可通过对节点的位移进行如下的插值运算^[6-7], 其过程近似表示为

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{U}_i \quad (6)$$

式中: N_i 为插值函数或形函数; $\mathbf{U}_i$ 为第 i 节点的位移; n 为任一单元的节点数。

式(6)的矩阵形式可表示为

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = [\hat{N}_1 \quad \hat{N}_2 \quad \cdots \quad \hat{N}_i]_{3 \times 3n} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_i \end{bmatrix}_{3n \times 1} = \mathbf{N} \mathbf{U} \quad (7)$$

式中

$$\mathbf{N} = [\hat{N}_1 \quad \hat{N}_2 \quad \cdots \quad \hat{N}_i]_{3 \times 3n} \quad (8)$$

$$\hat{N}_i = N_i \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (9)$$

将式(9)代入式(2)可得

$$\mathbf{S} = \partial_u \mathbf{N} \mathbf{U} = \mathbf{B} \mathbf{U} \quad (10)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_i] \quad (11)$$

应变矩阵 $\mathbf{B}_i$ 为

$$\mathbf{B}_i = \partial_u \mathbf{N}_i \quad (12)$$

将式(11)代入式(5)可得

$$\delta \mathbf{U}^T \left(\iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{c} \mathbf{B} dV \mathbf{U} + \iiint_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{U}} - \iint_S \mathbf{N}^T \mathbf{F} dS \right) = 0 \quad (13)$$

那么运动方程可表示为

$$\mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}_s \quad (14)$$

式中 $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{F}_s$ 分别为刚度矩阵, 质量矩阵和所受外力矢量, 且

$$\mathbf{K} = \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{c} \mathbf{B} dV \quad (15)$$

$$\mathbf{M} = \iiint_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (16)$$

$$\mathbf{F}_s = \iint_S \mathbf{N}^T \mathbf{F} dS \quad (17)$$

对于自由振动, 则 $\mathbf{F}_s = 0$, 令 $\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} e^{i\omega t}$, 代入式(13)经整理后可得

$$\mathbf{K} \bar{\mathbf{U}} - \omega^2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{U}} = 0 \quad (18)$$

式中 ω 为石英晶体板高频振动的振动频率。那么我们需要解决的问题归结为求解式(17)的特征值。

2 石英晶体板的高频振动

2.1 石英晶体板模型

选取 AT-切石英晶体板的基本模型如图 1 所示。其中 $2a = 25 \times 10^{-4} \text{ m}$, $2b = 1 \times 10^{-4} \text{ m}$, $2c = 12.5 \times 10^{-4} \text{ m}$ 。石英晶体板模型的尺寸选取是基于理论分析中最佳长厚比的选取方法^[12-13]。

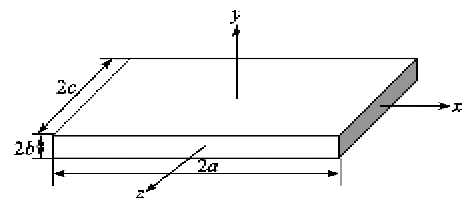


图1 石英晶体板模型

由于石英晶体材料的压电效应很小, 因此本文仅研究石英晶体板的自由振动^[2, 8]。在众多振动模式中, 我们最关注作为工作模式的厚度剪切振动模式。利用有限元法分析石英晶体板厚度剪切振动时会得到数目众多的频率, 为便于在 ANSYS 分析中调整求解区间, 根据理论分析结果对频率作归一化处理, 即

$$\Omega = \omega / f \quad (19)$$

$$f = \frac{1}{4b} \sqrt{c_{66} / \rho} \quad (20)$$

式中 c_{66} 为一个石英晶体材料的弹性常数^[1]。这样最终所得频率解变化范围在 1 附近。

在利用 ANSYS 对石英晶体板的厚度剪切振动进行分析时,不同类型的网格划分会明显地影响计算结果^[14]。首先对模型采用四面体网格划分(见图 2),并用 ANSYS 中的自动网格划分工具,调节 SmartSize 选项至 1(网格划分最细,且单元类型采用 SOLID98 进行计算),但在输出结果中仍观察不到理想的厚度剪切振动的位移云图。接着采用六面体网格(见图 3),同时在长度方向(x 方向)上划分 20 个单元,宽度(z 方向)和厚度方向(y 方向)上各划分 10 个和 2 个单元,计算后便可观察到较粗略的厚度剪切振动的位移云图如图 4 所示。经过多次计算和比较,最终选定 SOLID226 耦合场六面体单元用于石英晶体板的网格划分。

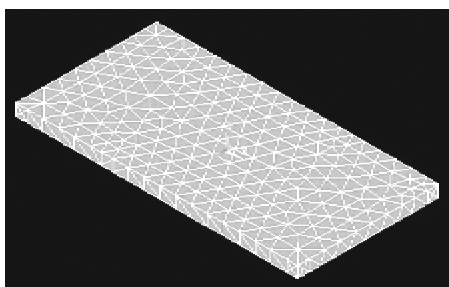


图 2 石英晶体板的四面体网格模型

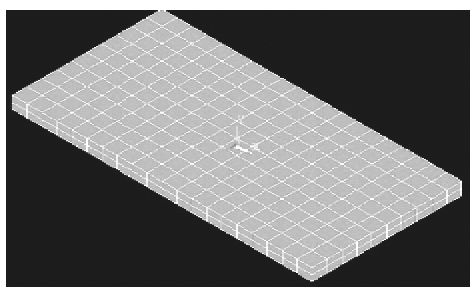


图 3 石英晶体板的六面体网格模型

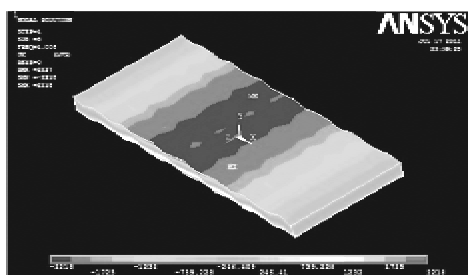


图 4 六面体网格计算所得到的厚度剪切振动的位移云图

2.2 收敛性证明

已有理论研究表明,在划分网格时一个波长内至少应有 8 个节点,这样才能保证数值计算结果的收敛^[6-7, 14]。因此在验证收敛性时我们分别在长度和宽度方向上划分的单元数为 100 个和 50 个,在厚度方向划分单元数从 2 个逐步增加,收敛性计算结果如表 1 所示。

表 1 收敛性结果

矩形板网格划分形式	自由度数	厚度剪切振动频率
2×100×50	168 615	1.006 785 474 1
3×100×50	229 971	1.003 764 834 8
4×100×50	291 327	1.003 214 018 5
5×100×50	352 683	1.003 058 372 2
6×100×50	414 039	1.003 001 518 7

由表 1 可看出,当网格数逐步增加时,石英晶体板厚度剪切振动的振动频率逐渐收敛于 1.003。为能在有限元分析结果中观察到清晰和准确的厚度剪切振动的位移云图及保证在划分网格时一个波长内至少有 8 个节点的原则,我们沿长度和宽度方向上划分的单元数分别为 100 个和 50 个,在厚度方向划分单元数为 5 个,同时设定求解频率为 0.998~1.008,最终的石英晶体板的有限元网格模型如图 5 所示。

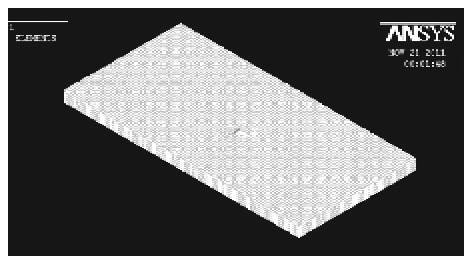


图 5 石英晶体板的有限元模型

2.3 计算结果

首先计算获得了多个石英晶体板高频振动的振动频率,这里需要找出厚度剪切振动模式最强而其他耦合模式最弱的振动频率,这样就能避免其他模式对石英晶体板工作模式的强烈耦合。在解析法求解过程中 Wang 等通过观察石英晶体板的模态位移图来确定石英晶体板的最佳长厚比,并以此来避免厚度剪切振动模式和其他振动模式的强烈耦合^[2-3]。基于这一思想,在有限元计算过程中,同样可观察到厚度剪切振动的位移云图,如果在基频附近能观察到清晰的厚度剪切振动位移云图,基本上可确定为所需振动模式,若观察不到清晰的厚度剪

切振动的位移云图,应舍去计算所得振动频率。这样可通过改变石英晶片的长度来获得厚度剪切振动模式最强而耦合模式较弱的石英晶片的最佳尺寸。最终获得最清晰的石英晶体板厚度剪切振动位移云图,如图 6 所示。

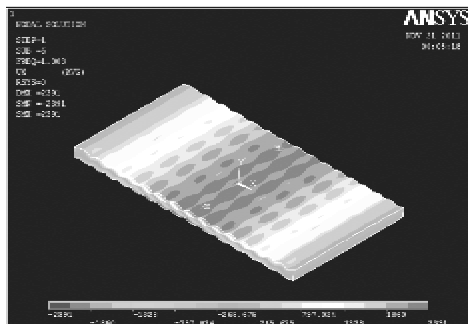


图 6 石英晶体板厚度剪切振动的位移云图

3 结束语

本文首先建立了石英晶体板的三维有限元模型,建模过程中发现采用六面体网格类型对石英晶体板进行划分,即使网格数量较少也能观察到较清晰的厚度剪切振动位移云图,而采用四面体网格时,必须极大地增加网格数量才能观察到同样结果。接着通过增加网格和自由度数量,我们验证了有限元计算结果的收敛性。最终针对有限元计算获得的多个石英晶体板高频振动的振动频率,提出了通过观察厚度剪切振动的位移云图的方法来确定石英晶片的最佳尺寸。本文建立的模型和提出的有限元计算中厚度剪切振动的识别方法为将来开展石英晶体谐振器复杂结构的有限元计算奠定了基础。

参考文献:

- [1] YANG Jiashi. The mechanics of piezoelectric structures [M]. Singapore: World Scientific, 2006.
- [2] YANG Jiashi. Analysis of piezoelectric devices [M]. Singapore: World Scientific, 2006.
- [3] MINDLIN R D. An introduction to the mathematical theory of vibrations of elastic plates [M]. Singapore: World Scientific, 2007.
- [4] WU Rongxing, WANG Ji, DU Jianke, et al. An analysis of nonlinear vibrations of coupled thickness-shear and flexural modes of quartz crystal plates with the homotopy analysis method [J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 2012, 59 (1): 30-39.
- [5] WANG Ji, ZHAO Wenhua, DU Jianke, et al. The calculation of electrical parameters of AT-cut quartz crystal resonators with the consideration of material viscosity [J]. Ultrasonics, 2011, 51(1): 65-70.
- [6] WANG Ji, WANG Yu, HU Wenke, et al. Parallel finite element analysis of high frequency vibrations of quartz crystal resonators on Linux cluster [J]. Acta Mechanica Sinica, 2008, 21(6): 549-554.
- [7] 陈洋洋. 考虑复杂因素的石英晶体谐振器并行有限元分析[D]. 宁波: 宁波大学, 2012.
- [8] 吴荣兴. 各向异性压电板非线性高频振动方程及其求解研究[D]. 宁波: 宁波大学, 2012.
- [9] 陈晟, 杨俊. 基于 ANSYS 的压电圆片振子径向振动模式分析[J]. 计算机仿真, 2009, 26(3): 318-321.
- CHEN Sheng, YANG Jun. Analysis of radial vibrations modes of round piezoelectric ceramics based on ANSYS [J]. Computer Simulation, 2009, 26(3): 318-321.
- [10] 雷辉, 周双娥. 用 ANSYS 软件分析压电陶瓷的振动状态[J]. 湖北大学学报: 自然科学版, 2008, 30(1): 29-33.
- LEI Hui, ZHOU Shuang'e. Using ANASYS to analyze the vibration state of piezoelectric ceramic [J]. Journal of Hubei University: Natural Science, 2008, 30 (1): 29-33.
- [11] 李继亮. 基于 ANSYS 的压电声波器件分析方法[D]. 宁波: 宁波大学, 2012.
- [12] WANG Ji, WU Rongxing, YANG Lijun, et al. The fifth-order overtone vibrations of quartz crystal plates with corrected higher-order Mindlin plate equations [J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 2012, 59(10): 2279-2291.
- [13] WANG Ji, ZHAO Wenhua. The determination of the optimal length of crystal blanks in quartz crystal resonators [J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 2005, 52(11): 2023-2030.
- [14] 张倩, 胡仁喜, 康士廷. ANSYS12.0 电磁学有限元分析从入门到精通[M]. 北京: 机械工业出版社, 2010.