

# 变负载压电悬臂梁共振频移量研究

李佳杰, 郭辉, 王岩松, 闫旭

(上海工程技术大学汽车工程学院, 上海 201620)

**摘要:**基于 Euler-Bernoulli 梁原理研究了铝基双晶串联压电悬臂梁电压频响和短路-开路共振频移量问题。以悬臂梁总厚度和压电陶瓷厚度为影响参数, 首先推导了输出电压的单/多模态解, 再以单模态解为基础, 分析了不同厚度压电悬臂梁短路-开路共振频移量。研究表明, 与多模态解相比, 单模态解的估计性良好, 且计算简便。在任意变负载区间内, 存在最劣压电陶瓷厚度, 使短路-开路共振频移量最大。因此, 在进行压电悬臂梁结构设计时, 应尽量避免最劣点, 使外部负载具有最佳适应性, 提高能量回收效率。

**关键词:**能量回收; 压电悬臂梁; 解析建模; 变负载; 共振频移量

**中图分类号:** TN384 **文献标识码:** A

## Investigation on Resonance Frequency Shift of Cantilevered Piezoelectric Beams With Variable Load Resistances

LI Jiajie, GUO Hui, WANG Yansong, YAN Xu

(College of Automotive Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China)

**Abstract:** Based on Euler-Bernoulli beam theory, the voltage response of the cantilevered piezoelectric beam for bimorphs in series connection with aluminum substrates and the resonance frequency shift of short-open circuit are investigated in this paper. By using the total thickness of the cantilevered beam and the thickness of piezoelectric ceramics are chosen as the influencing parameters, the single/multi-mode solutions of the output voltage are derived firstly, then the short-open circuit resonance frequency shift under different thickness of the cantilevered piezoelectric beams is analyzed on the basis of the single-mode solutions. The results exhibit that the single-mode solutions are of good estimation and simple calculating comparing with the more accurate multi-mode solutions; in the arbitrary range of variable load resistance, there exists the worst point of the thickness of piezoelectric ceramics, which leads to maximum resonance frequency shift. Accordingly, the worst point should be avoided for optimum adaptability and more desirable efficiency of energy harvesting when the cantilevered piezoelectric beam is designed.

**Key words:** energy harvesting; cantilevered piezoelectric beams; analytical modeling; variable load resistance; resonance frequency shift

### 0 引言

随着微机电系统(MEMS)技术的不断发展,对其电源寿命,尺寸大小,环保性能的要求日益增高,传统的化学电池已不能满足上述条件,因此研究新型供电方式尤为重要。由于压电材料具有较高的机电耦合性能和输出电压,无需外接电源,以及与MEMS技术兼容等优点,因而基于压电效应的自供电技术已备受关注<sup>[1-4]</sup>。已有研究成果表明,压电悬臂梁能量回收性能与结构尺寸<sup>[1-3]</sup>和材料属性<sup>[5-6]</sup>等相关,当确定了悬臂梁式能量回收装置的机械结构

和材料属性后,外部附加结构和外部负载决定了输出性能的优劣。基于压电悬臂梁结构,闫世伟等<sup>[7]</sup>根据哈密顿原理建立了压电悬臂梁能量转换模型,采用数值模拟和实验结合的方法,通过改变悬臂梁末端质量块来调整梁的固有频率使其与外部激振频率匹配,从而提高压电梁的发电能力。Jung等<sup>[4]</sup>研究了非线性振动下一种压电-磁铁复合能量回收器,与传统压电悬臂梁相比,在梁的末端粘贴磁铁块并安装外部旋转磁体,可提高能量回收效率,拓宽有效频带。Li等<sup>[8]</sup>研究了共振频率下不同外部负载的

收稿日期:2016-06-16

基金项目:上海市自然科学基金资助项目(14ZR1418600);国家自然科学基金资助项目(51175320,51675324)

作者简介:李佳杰(1992-),男,四川巴中人,硕士生,主要从事压电能量回收的研究。通信作者:郭辉(1981-),男,山东曹县人,副教授,硕士生导师。E-mail:hgsues@163.com。

响应,仿真分析结果表明,存在一个最优外部负载使输出功率最大,输出电压随外部负载增大而增大。

目前,压电梁输出性能的频响分析大多在单一负载状态下进行,压电能量回收器对外部负载的适应性不高。因为外部负载不是固定值,而是表现为整个回路从短路到开路(外部负载阻值从 $0 \rightarrow \infty$ )的过程,因此,有必要研究变负载下输出性能频率响应的分析。本文研究了短路-开路共振频移量问题,且任意负载的电压频响曲线均在此范围内。首先推导了输出电压的单/多模态解,然后阐述了单模态解的良好估计性,再以单模态解为基础分析了不同厚度悬臂梁短路-开路共振频移量。

## 1 理论分析

### 1.1 单/多模态解

图1为双晶串联压电悬臂梁结构示意图。压电陶瓷与弹性金属基板粘贴在一起组成悬臂梁,压电梁的一端固定。压电梁受基础激励作用时会产生小变形,可将其看作 Euler-Bernoulli 梁。压电梁长为 $L$ ,宽为 $b$ ,压电陶瓷和弹性基板厚度分别为 $t_p$ 和 $t_m$ 。本文选用 PZT-5A 压电陶瓷和铝制弹性基板。

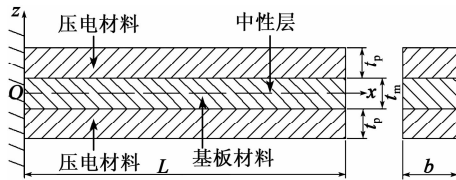


图1 双晶压电悬臂梁示意图

基础激励下,压电悬臂梁的绝对横向位移为

$$w(x, t) = w_{\text{rel}}(x, t) + w_b(t) \quad (1)$$

式中: $w_{\text{rel}}(x, t)$ 为压电悬臂梁相对于夹紧端的位移; $w_b(t)$ 为基础激励位移。为便于计算,令 $w_b(t) = W_0 e^{j\omega t}$ ,其中 $W_0$ 为基础位移幅值, $j$ 为虚数单位。

双晶压电悬臂梁自由振动方程为

$$Y_{\text{bs}} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + c_s I \frac{\partial w^5(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

式中: $Y_{\text{bs}}$ 为压电悬臂梁抗弯刚度; $c_s$ 为应变率阻尼系数; $m$ 为单位长度梁的质量。

根据文献[9],对于横向振动悬臂梁结构,其振型函数为

$$\phi_r(x) = \frac{1}{\sqrt{mL}} \left[ \cos \frac{\lambda_r}{L} x - \cosh \frac{\lambda_r}{L} x + \tau_r \left( \sin \frac{\lambda_r}{L} x - \sinh \frac{\lambda_r}{L} x \right) \right] \quad (3)$$

式中: $\tau_r$ 为比例系数; $\lambda_r$ 为第 $r$ 阶模态特征值,且有

$$\cos \lambda_r \cosh \lambda_r = -1 \quad (4)$$

$$\tau_r = \frac{\sin \lambda_r - \sinh \lambda_r}{\cos \lambda_r + \cosh \lambda_r} \quad (5)$$

第 $r$ 阶模态对应的无阻尼固有频率可表示为

$$\omega_r = \lambda_r^2 \sqrt{\frac{Y_{\text{bs}} I}{mL^4}} \quad (6)$$

对于压电悬臂梁,其压电本征方程为

$$\begin{cases} T_1^p = c_{11}^E S_1^p - e_{31} E_3 \\ D_3 = e_{31} S_1^p + \epsilon_{33} E_3 \end{cases} \quad (7)$$

式中: $T_1^p$ ,  $S_1^p$ ,  $D_3$ 和 $E_3$ 分别为压电陶瓷层的纵向应力分量、纵向应变分量、电位移分量和电场强度分量; $c_{11}^E$ ,  $e_{31}$ 和 $\epsilon_{33}$ 分别为常电压下压电陶瓷弹性模量、压电应力常数和介电常数。

机电方程的等效表达式<sup>[10]</sup>为

$$\begin{cases} \frac{d^2 \eta_r(t)}{dt^2} + 2\zeta_r \omega_r \frac{d\eta_r(t)}{dt} + \omega_r^2 \eta_r(t) - \\ u(t) K_r = f_r(t) \\ C_p \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} + \sum_{r=1}^{\infty} K_r \frac{d\eta_r(t)}{dt} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

式中: $K_r = e_{31} b t_{\text{pe}} \left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right|_{x=L}$ ,且有 $t_{\text{pe}} = (t_m + t_p)/2$ ; $f_r(t)$ 为模态力函数; $\eta_r(t)$ 为模态坐标函数; $C_p$ 为压电悬臂梁等效电容,且有 $C_p = \epsilon_{33} bL/(2t_p)$ 。

令 $f_r(t) = F_r e^{j\omega t}$ ,  $\eta_r(t) = H_r e^{j\omega t}$ ,  $u(t) = U_0 e^{j\omega t}$ ,代入式(8)可得耦合线性方程为

$$\begin{cases} (\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\omega_r \zeta_r) H_r - K_r U_0 = F_r \\ \left( \frac{1}{R} + j\omega C_p \right) U_0 + j\omega \sum_{r=1}^{\infty} K_r H_r = 0 \end{cases} \quad (9)$$

由式(9)可求出输出电压相对于基础激励加速度 $w_b(t)'' = -\omega^2 W_0 e^{j\omega t}$ 的多模态响应 $U_1$ 为

$$U_1 = \frac{u(t)}{w_b(t)''} = \frac{\sum_{r=1}^{\infty} M_1}{\frac{1}{R} + j\omega C_p + \sum_{r=1}^{\infty} N_1} \quad (10)$$

式中: $M_1 = -j\omega K_r \delta_r / (\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\zeta_r \omega_r \omega)$ ,  $N_1 = M_1 K_r / \delta_r$ ,  $\delta_r$ 为模态质量项,且 $\delta_r = -m \int_0^L \phi_r(x) dx$ 。

多模态解虽然精确度高,但计算复杂,需考虑各阶模态的叠加,但在基本模态附近,邻近模态的残留效应很小,且基本模态下能量回收性能最好。因此,在压电能量回收实践中,通常将基本模态(一阶模态)能量输出作为衡量回收性能指标。根据式(10)可求出相应第 $r$ 阶单模态解为

$$U_r = \frac{-j\omega R K_r \delta_r}{\frac{1}{R} + j\omega R C_p M_1 + j\omega R K_r \delta_r} \quad (11)$$

1.2 短路-开路共振频移量

根据式(11),求出输出电压频响函数的模为

$$|U_r| = \frac{\tilde{\omega}\gamma_r|\delta_r/\theta_r|}{\sqrt{M_2^2 + N_2^2}} \tag{12}$$

式中:  $M_2 = (1 - \tilde{\omega}^2)/\nu_r - 2\tilde{\omega}^2\zeta_r$ ;  $N_2 = 2\tilde{\omega}\zeta_r/\nu_r + \tilde{\omega}(1 + \gamma_r) - \tilde{\omega}^3$ ;  $\tilde{\omega} = \omega/\omega_r$ ,  $\nu_r = RC_p\omega_r$ ,  $\gamma_r = K^2/(C_p\omega_r^2)$ , 求出短路( $\nu_r \rightarrow 0$ )和开路( $\nu_r \rightarrow \infty$ )情况下电压频响函数的模分别为

$$|U_{rs}| = \lim_{\nu_r \rightarrow 0} |U_r| = \frac{\tilde{\omega}\gamma_r\nu_r|\delta_r/K_r|}{\sqrt{(1 - \tilde{\omega}^2)^2 + (2\zeta_r\tilde{\omega})^2}} \tag{13}$$

$$|U_{ro}| = \lim_{\nu_r \rightarrow \infty} |U_r| = \frac{\gamma_r|\delta_r/K_r|}{\sqrt{(2\zeta_r\tilde{\omega})^2 + [(1 + \gamma_r) - \tilde{\omega}^2]^2}} \tag{14}$$

令  $\partial U_{rs}/\partial \tilde{\omega} = 0$ ,  $\partial U_{ro}/\partial \tilde{\omega} = 0$ , 即可求出无量纲短路和开路共振频率分别为  $\tilde{\omega}_{ress} = 1$ ,  $\tilde{\omega}_{reso} = \sqrt{1 + \gamma_r - 2\zeta_r^2}$ 。所以短路和开路共振频率分别为

$$\omega_{ress} = \omega_r \tag{15}$$

$$\omega_{reso} = \omega_r \sqrt{1 + \gamma_r - 2\zeta_r^2} \tag{16}$$

求出短路-开路共振频移量为

$$\Delta\omega_{reso} = \omega_r \sqrt{(1 + \gamma_r - 2\zeta_r^2) - 1} \tag{17}$$

2 算例分析

2.1 单/多模态解的比较

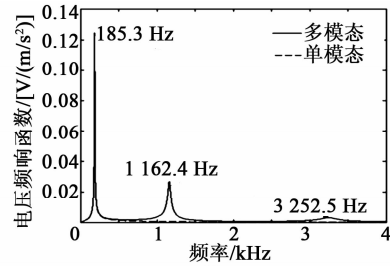
在所搭建单/多模态解模型基础上,给出压电悬臂梁单/多模态解的比较和不同厚度压电能量回收器共振频移量算例。首先,根据 1.1 节的理论分析进行单/多模态解的比较,验证单模态解良好的估计性;然后在单模态解的基础上,分析不同厚度压电梁的短路-开路共振频移量。表 1 为压电悬臂梁的物理特性,选取 PZT-5A 和铝分别作为压电材料和基板材料。

表 1 压电悬臂梁物理特性

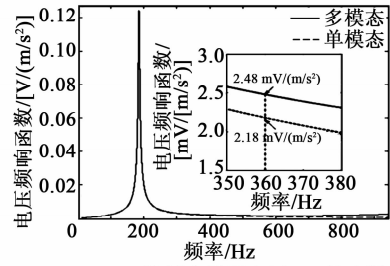
参数	PZT-5A	铝基板
弹性模量 $C_{11}^F, Y_{bs}/\text{GPa}$	61	70
密度 $\rho /(\text{kg}/\text{m}^3)$	7 750	2 700
压电应力常数 $e_{31}/(\text{C}/\text{m}^2)$	-10.4	-
介电常数 $\epsilon_{33}/(\text{nF}/\text{m})$	13.3	-
长度 $L/\text{mm}$	30	30
宽度 $b/\text{mm}$	5	5
厚度 $t_p, t_m/\text{mm}$	0.15	0.05

试验测定压电梁前三阶模态阻尼<sup>[9]</sup>分别为  $\zeta_1 = 0.010, \zeta_2 = 0.012, \zeta_3 = 0.030$ 。采用表 1 所示双晶梁进行单/多模态解比较分析,如图 2 所示。此处的

单模态解为一阶模态解,多模态解展示了前三阶模态响应,电路中外部负载为  $R = 10 \text{ k}\Omega$ 。由图可看出,一~三阶共振频率分别为  $f_{m1} = 185.3 \text{ Hz}$ ,  $f_{m2} = 1\ 162.4 \text{ Hz}$ ,  $f_{m3} = 3\ 252.5 \text{ Hz}$ 。在一阶模态附近有较精确的多模态解,单模态解具有良好的估计性,其相对于多模态解的误差很小,且激振频率越偏离一阶共振频率,误差就越大。由图 2(b)可看出,当激振频率偏移一阶共振频率约 1 倍,激振频率为 360 Hz 时,误差为 12.1%。另外,在二、三阶模态附近,单模态解的估计性很差,这是因为此时这两阶模态附近的响应仅是一阶模态很小的残留效应。因此,后续将采用单模态解分析一阶模态下短路-开路共振频移量。



(a) 前三阶模态附近电压FRF



(b) 一阶模态附近电压FRF放大图

图 2 单/多模态解电压 FRF 比较

2.2 短路-开路共振频移量

在验证了单模态解良好估计性的基础上,该文进行了基本模态附近短路-开路共振频移量的分析。根据式(17)可知,频移量与模态阻尼  $\zeta_r$  有关,但  $\gamma_1$  是  $2\zeta_1^2$  的数百倍,因此,计算频移量时可忽略模态阻尼的影响。图 3 为表 1 所描述的压电梁电压频响

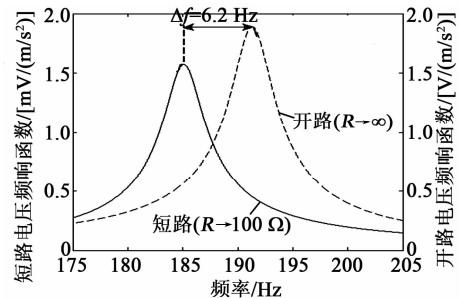


图 3 短路-开路共振频移量

曲线。根据结果可看出,短路共振频率为 185.1 Hz,开路共振频率为 191.3 Hz,频移量  $\Delta f = 6.2$  Hz。需要说明的是,外部负载为  $100 \Omega$  时系统已接近短路,即电压响应值仅在共振频率附近才具有较高的可信度<sup>[10]</sup>。

图 4 为压电悬臂梁总厚度  $T = 0.35$  mm 时,不同压电陶瓷层厚度对应的短路-开路共振频移量曲线。由图可以看出,存在一个最劣压电陶瓷厚度点  $t_p^* = 0.097$  mm,使共振频移量最大( $\Delta f^* = 7.26$  Hz)。在实际能量回收实践中,期望短路-开路共振频移量越小越好。因此,在进行压电悬臂梁结构设计时,应尽量避免此最劣点,以达到外部负载具有最佳适应性的目的。

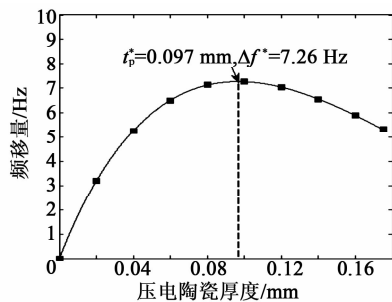


图 4 不同压电陶瓷厚度下短路-开路共振频移量

图 5 为压电陶瓷厚度和悬臂梁总厚度处于变化状态时,对应的短路-开路共振频移量表面图。结果表明,从整体上看,悬臂梁总厚度越大,频移量越大。当总厚度为 0.8 mm 时,最大频移量已达 17 Hz。不同总厚度下均有  $\Delta f^*$  和与之对应的  $t_p^*$ 。但压电悬臂梁总厚度过大,会使 Euler-Bernoulli 梁假设失效。因此,选择最大总厚度为 0.8 mm,此时梁的跨度与最大总厚度之比为 37.5,符合 Euler-Bernoulli 梁假设。另外,悬臂梁总厚度应不小于压电陶瓷厚度的 2 倍,即  $T \geq 2t_p$ 。

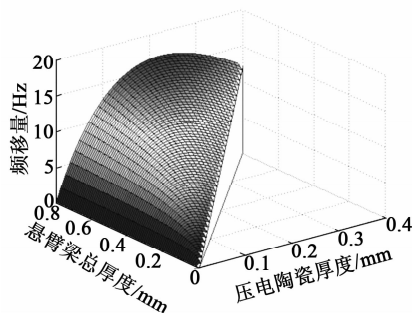


图 5 不同压电陶瓷厚度和总厚度下短路-开路共振频移量

### 3 结束语

本文通过建立双晶压电悬臂梁频率响应数学模

型,以单位重力加速度输出电压为发电性能评价指标,重点研究了基本模态附近压电能量回收器的短路-开路共振频移量问题。研究结果表明,整体上,悬臂梁总厚度越大,频移量越大;若总厚度不变,存在一个最劣压电陶瓷厚度点,使得频移量最大。因此,在进行压电悬臂梁结构设计时,应尽量避免该最劣点,使外部负载具有最佳适应性。

### 参考文献:

- [1] ROUNDY S, WRIGHT P K. A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics[J]. Smart Materials and Structures, 2004, 13: 1131-1142.
- [2] ANTON S R, SODANO H A. A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003-2006) [J]. Smart Materials and Structures, 2007, 16(3): R1-R21.
- [3] SUNITHAMANI S, LAKSHMI P. Simulation study on performance of MEMS piezoelectric energy harvester with optimized substrate to piezoelectric thickness ratio[J]. Microsystem Technologies, 2014, 21(4): 1-6.
- [4] JUNG J, KIM P, LEE J I, et al. Nonlinear dynamic and energetic characteristics of piezoelectric energy harvester with two rotatable external magnets[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2015, 92: 206-222.
- [5] HIDAKA S, KIM J H, JUNG H J, et al. Design of supplemental plate for piezoelectric system to distribute impact force[C]// Aveiro: Proceedings of ISAF-ECAPD-PFM, IEEE, 2012: 1-4.
- [6] NABAWY M R A, PARSLEW B, CROWTHER W J. Dynamic performance of unimorph piezoelectric bending actuators[J]. Journal of Systems and Control Engineering, 2014, 229: 118-129.
- [7] 闫世伟, 杨建文, 杨志刚. 基于 Hamilton 原理的压电悬臂梁模型建立与分析[J]. 压电与声光, 2014, 36(5): 753-758.  
YAN Shiwei, YANG Jianwen, YANG Zhigang. Modeling and analysis of piezoelectric cantilever beams based on Hamilton principle [J]. Piezoelectrics & Acousto-optics, 2014, 36(5): 753-758.
- [8] LI Jiajie, WU Huazhi, CHEN Canfeng. Harvesting energy density performance of cantilevered piezoelectric transducers[J]. International Journal of Research in Engineering and Science, 2016, 4(5): 35-41.
- [9] ERTURK A, INMAN D J. Mechanical considerations for modeling of vibration-based energy harvesters [C]// Las Vegas: 21st Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, ASME, 2007: 769-778.
- [10] ERTURK A, INMAN D J. A distributed parameter electromechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2008, 130(4): 041002.